

Artículo Original

O estudo das equações diofantinas lineares e aplicações¹

Romario Sidrone De Souza²

Artículo recibido: 30 de septiembre de 2013 / Artículo aceptado: 12 de diciembre de 2013

■ RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo bibliográfico sobre as equações diofantinas lineares: processos históricos, conceitos, demonstrações e alguns tópicos elementares da teoria dos números, essenciais para seu entendimento e desenvolvimento algébrico. Buscou investigar quais os benefícios/contribuições do uso das tecnologias de informação e comunicação (TIC), através do Solver e Excel para ensino e aprendizagem da álgebra, tentando identificar as dificuldades e/ou facilidades apresentadas pelos alunos durante todo o processo de aplicação das atividades. O estudo ocorreu através de uma pesquisa qualitativa a qual consistiu em um estudo de caso que teve como campo de coleta de dados a Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT), sendo escolhida uma turma do 5º semestre do curso de Matemática. Os sujeitos da pesquisa foram os alunos da turma investigada. A coleta de dados teve como instrumentos a observação sistemática, o questionário e ainda uma sequência de atividades aplicada aos alunos sobre o tema abordado neste trabalho. Percebeu-se que o uso das TIC pode se tornar um grande aliado em sala de aula, para construção do pensamento matemático algébrico, desde que bem elaboradas pelo professor.

Palavras-Chave: equações diofantinas, informática, solver, tecnologias de informação e comunicação (TIC)

¹ Artigo para conclusão de curso de graduação em Licenciatura em Matemática - UNEMAT, 2013.

² Possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade do Estado de Mato Grosso (2013). Atualmente é Professor da Escola Municipal Estrelinha do Norte.

El estudio de las ecuaciones Diofantinas lineales y sus aplicaciones

■ RESUMEN

En este trabajo se presenta un estudio bibliográfico sobre las ecuaciones lineales diofánticas: procesos históricos, conceptos, demostraciones y algunos temas elementales de la teoría de los números, esenciales para su entendimiento y desenvolvimiento algebraico. El objetivo fue investigar qué beneficios/contribuciones se obtienen del uso de las tecnologías de información y comunicación (TIC), a través de Solver y Excel para la enseñanza y aprendizaje de algebra, intentando identificar las dificultades y/o facilidades de los alumnos durante todo el proceso de ejecución de las actividades. El estudio se llevo a cabo a través de una investigación cualitativa la cual consistió en un estudio de caso que tuvo como campo de recolección de datos la Universidad del Estado de Mato Grosso (UNEMAT), allí se eligió una clase de quinto semestre del curso de Matemáticas. Los sujetos de la investigación fueron los alumnos de la clase investigada. La recolección de datos tuvo como instrumentos una observación sistemática, un cuestionario y además una secuencia de actividades aplicadas a los alumnos sobre el tema abordado en este trabajo. Se observó que el uso de las TIC puede convertirse en una gran aliado en las aulas de clase, para la construcción del pensamiento matemático algebraico, si estas herramientas son bien elaboradas por el profesor.

Palabras clave: ecuaciones diofantinas, informática, solver, tecnologías de información y comunicación (TIC)

The study of linear Diohantine equations and their applications

■ ABSTRACT

This paper introduces a bibliographic study about the linear Diophantine equations: historical processes, concepts, demonstrations and some basic topics related to the theory of numbers that are crucial for understanding and solving them under algebraic terms. The objective was to investigate the benefits/contributions obtained by using IT, by means of Solver and Excel, for teaching and learning algebra, trying to identify the difficulties and/or facilities of students throughout the whole process of executing the activities. The study was carried out by means of a qualitative research process, which consisted of a study case in the UNEMAT, Brasil, as the data collection field, where a fifth semester mathematics class was chosen. The research subjects were the students of that class. The data collection had as instruments a systematic observation, a questionnaire and also a sequence of activities applied to the students about the subject approached in this research work. It was observed that the use of IT can be a great ally in the classrooms for building algebraic mathematical thinking if the tools are well elaborated by the teacher.

Key words: diophantine equations, computing, solver, IT

■ INTRODUÇÃO

A Teoria dos Números (ou aritmética dos números) trata-se de um ramo da matemática que estuda propriedades de números em geral e, particularmente, dos números inteiros. Inserido na Teoria dos Números, encontra-se o estudo de equações que possuem coeficientes inteiros e a restrição de que as soluções dessa equação também sejam números inteiros. Esse estudo é conhecido como o estudo das Equações Diofantinas, cuja origem deve-se ao filósofo e matemático grego Diofanto (200–284 d.C.).

Podemos citar como alguns exemplos de equações diofantinas, as equações $2x + 4y = 5$, $y^2 - x^3 = -2$ e $x^2 + y^2 = z^2$

Esta última equação diofantina, talvez seja a mais famosa particularização do Teorema de Pitágoras, ou seja, $x^2 + y^2 = z^2$, com x, y, z , inteiros positivos e concebidos como os lados de um triângulo retângulo.

O tema abordado neste trabalho nem sempre é contemplado no conteúdo programático da disciplina de “Álgebra Abstrata I” onde uma parte de sua ementa é destinada ao estudo dos conceitos elementares de Teoria dos Números sendo oferecida no 5º semestre do curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual de Mato Grosso (UNEMAT), Campus Universitário de Sinop – MT. Dessa forma, além de considerar interessante desenvolver um estudo detalhado dos conceitos e aplicações relacionados com o tema, este trabalho poderá servir de material didático ao leitor interessado pelo assunto.

Equações diofantinas: uma abordagem histórica e os conceitos elementares da teoria dos números

Neste capítulo, trataremos de problemas matemáticos envolvendo equações lineares indeterminadas em duas e em três variáveis, daremos um enfoque especial aos tópicos elementares que tratam da Teoria dos Números para servir de embasamento teórico para o estudo das equações diofantinas lineares (equações lineares indeterminadas) sendo a fundamentação teórica baseada em Domingues (1991) e Santos (2000) e, além disso, trazemos uma breve abordagem histórica sobre as equações diofantinas.

Sabe-se que as equações diofantinas lineares do tipo $ax + by = c$, onde a, b e c são números inteiros, tiveram sua abordagem em um período mais recente, diferentemente dos problemas cujas soluções envolviam equações determinadas, encontrados em diversos textos antigos, como os babilônicos, os quais tratam de alguns problemas lineares ligados com o cálculo de áreas que são tratados com uma abordagem geométrica.

Assim como os babilônios, os indianos, chineses e gregos também se preocupavam com problemas de natureza concreta e, dessa forma, os problemas indeterminados ou impossíveis raramente era foco desses matemáticos. Esses matemáticos, mesmo demonstrando curiosidade, acreditavam que as equações hoje chamadas diofantinas se tratavam de erros de enunciados. A maioria dos problemas assim tratados pelas civilizações antigas admitem uma solução única.

De acordo com Boyer (2003), alguns

problemas de indeterminação linear foram encontrados nos manuscritos de Aryabhata, astrônomo e matemático hindu que viveu em cerca de 500 d.C., indicando ser o matemático e astrônomo da Índia Central Brahmagupta (598 - 665 d.C.), o primeiro a demonstrar a solução geral para a equação do segundo grau em números inteiros (as diofantinas) e também adar a solução geral da equação diofantina linear $ax + by = c$. Além disso, para as equações indeterminadas, Brahmagupta admitia não somente as soluções positivas, mas também soluções negativas.

Os problemas de indeterminação linear também foram abordados posteriormente pelo matemático Bhaskara (1114-1185 d.C.) e, de acordo com Boyer (2003), em suas obras Lilavati e Vija-ganita, pode-se encontrar diversos problemas sobre equações lineares, equações quadráticas determinadas e indeterminadas e triplos de Pitágoras.

Um dos textos mais antigos envolvendo equações diofantinas é um manuscrito do século X, onde segundo Eves (2007), o rei Carlos Magno (742-814) convidou o inglês Alcuíno de York (735-804) para desenvolver seu ambicioso projeto educacional. Alcuíno além de escrever sobre diversos tópicos matemáticos, também desenvolveu uma coleção de problemas em forma de quebra-cabeças que exerceu forte influência em autores de textos escolares por muitos séculos. Ainda de acordo com Eves (2007), Alcuíno de York pode ter sido o compilador da coleção latina intitulada *Propositiones ad acuendos juvenes*. Dentre os problemas dessa coleção, o que nos interessa é o seguinte:

Distribuindo-se 100 buschels de grãos entre 100 pessoas, de modo que cada homem receba 3 buschels, cada mulher 2 e cada criança $\frac{1}{2}$ buschel³, quantos são os homens, quantas as mulheres e quantas as crianças? (Eves, 2007, p.314).

³ Na Inglaterra 1 buschel = 36,367 litros (N.T.). Fonte: Eves (2007)

Formulando o problema matematicamente:

Sejam $\begin{cases} x = (\text{n}^\circ \text{ homens}) \\ y = (\text{n}^\circ \text{ mulheres}) \\ z = (\text{n}^\circ \text{ crianças}) \end{cases}$, participantes da distribuição.

Então, as condições dadas, podem ser descritas como:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 & (1) \\ 3x + 2y + \frac{1}{2}z = 100 & (2) \end{cases}$$

Uma solução apresentada por York foi:

Subtrair a equação (1) da equação (2) multiplicada por 2. Assim, dado o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 2\left(3x + 2y + \frac{1}{2}z\right) = 2 \times 100 \end{cases}$$

Resolvendo a segunda equação do sistema, obtemos:

$$2\left(3x + 2y + \frac{1}{2}z\right) - (x + y + z) = 100 \Rightarrow 5x + 3y = 100$$

Cujo resultado consiste em um sistema equivalente ao anterior dado por:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 & (3) \\ 5x + 3y = 100 & (4) \end{cases}$$

Determinando z a partir da equação (3) e x a partir da equação (4) obtemos:

$$\begin{cases} z = 100 - (x + y) \\ x = \frac{100 - 3y}{5} \end{cases}$$

Atribuindo $y = 15$ resulta:

$$\begin{cases} z = 74 \\ x = 11 \end{cases}$$

Dessa forma, uma solução para o problema é dada por **(11, 15, 74)** e qualquer escolha de y irá fornecer valores para x e consequentemente de z .

Entretanto, pelas condições do problema, estamos limitando a escolha do y de tal forma que as soluções estejam restritas aos inteiros positivos e, neste caso, y também será um inteiro positivo.

Observe que para este problema, torna-se simples determinar todas as possíveis soluções inteiras. Para que x seja um inteiro, o numerador $100 - 3y$ deve ser divisível por 5 e, além disso, $0 \leq y \leq \frac{100}{3}$ [pois queremos soluções que sejam inteiras e positivas]. Assim, atribuindo valores de 0 a 33 para o inteiro y obtemos valores para x e z . Portanto, de acordo com a tabela 1, teremos apenas 7

soluções inteiras e positivas para o problema dado sendo: **(20, 0, 80), (17, 5, 78), (14, 10, 76), (11, 15, 74), (8, 20, 72), (5, 25, 70), (2, 30, 68)**.

Observe que as soluções inteiras positivas são obtidas a partir de $y \in \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30\}$. Podemos ainda, generalizar as soluções apresentadas restringindo-as apenas aos conjunto dos inteiros positivos parametrizando y em função de um inteiro t onde $1 \leq t \leq 7$. Dessa forma, uma parametrização para y pode ser dada por $y = -5 + 5t; 1 \leq t \leq 7$. Consequentemente, obteremos:

$$\begin{cases} z = 100 - (x + y) \\ x = \frac{100 - 3y}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 82 - 2t \\ x = 23 - 3t \end{cases}; 1 \leq t \leq 7$$

As novas equações parametrizadas x , y e z fornecem as mesmas soluções $[20, 0, 80]$, $[17, 5, 78]$, $[14, 10, 76]$, $[11, 15, 74]$, $[8, 20, 72]$, $[5, 25, 70]$, $[2, 30, 68]$ quando variamos $1 \leq t \leq 7$.

Geometricamente, podemos fazer duas interpretações conforme apresentadas a seguir:

a) O conjunto solução será uma reta definida pela intersecção de dois planos (figura 1) quando consideramos como domínio o conjunto dos números reais, ou seja, atribuindo valores de 0 a 33 para o inteiro y , obtemos os números inteiros 0, 5, 10, 15, 20, 25 e 30 para y e ainda números reais conforme apresentados na figura 1, para o sistema linear:

$$\begin{cases} z = 100 - (x + y) \\ x = \frac{100 - 3y}{5} \end{cases} ; 0 \leq y \leq \frac{100}{3}$$

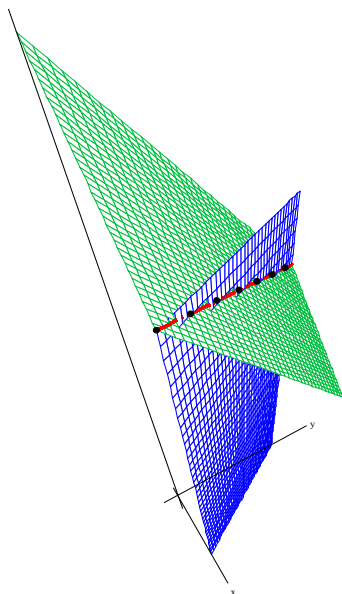


Figura 1. Visualização geométrica do conjunto solução que corresponde a uma reta definida pela intersecção de dois planos.

Fonte: Plotado no software Winplot

b) O conjunto solução será uma coleção de pontos colineares (figura 2) quando consideramos como domínio o conjunto dos números inteiros, ou seja, quando descartamos os valores de y para os quais x e z serão números reais. Neste caso, parametrizamos y em função de t para obter um sistema linear que resultasse em uma reta contendo infinitos pontos, inclusive os pontos correspondente as todas as soluções do problema de acordo com o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} x = 23 - 3t \\ y = -5 + 5t \\ z = 82 - 2t \end{cases} ; t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

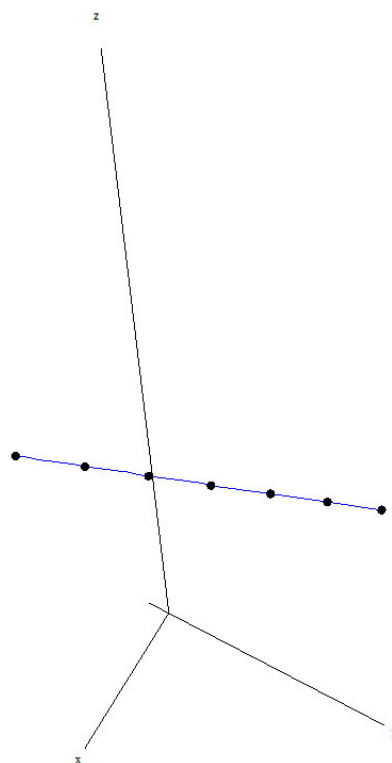


Figura 2. Visualização geométrica do conjunto solução que corresponde a uma reta formada pela coleção de pontos colineares.

Fonte: Plotado no software Winplot

Na seção 1.3 e 1.3.1 deste capítulo, será feito o estudo das equações diofantinas em duas e em três variáveis e, após o estudo apresentado, veremos que a solução geral determinada a partir dos conceitos e teoremas, será correspondente a solução que foi apresentada para o problema proposto acima.

Diofanto e as equações diofantinas

As equações diofantinas recebem este nome devido ao matemático grego Diofanto (200 – 284) que se interessou em resolver problemas cujas soluções fossem números inteiros ou racionais.

De acordo com Eves (2007) nada se sabe sobre a nacionalidade de Diofanto e da época exata em que viveu, levando os historiadores a situá-lo no século III. Diofanto de Alexandria – Egito, teve uma enorme importância no desenvolvimento da Álgebra influenciando fortemente os europeus que posteriormente se dedicaram à Teoria dos Números.

Um dado pessoal sobre Diofanto, pode ser retratado em um dos problemas algébricos gregos antigos apresentados na coleção conhecida como *Palatine* ou *Antologia grega*, que contém 46 problemas numéricos em forma epigramática. Esta obra foi reunida por volta de 500 d.C. onde, um de seus problemas, caso seja historicamente correto, trata-se do epitáfio de Diofanto:

Deus lhe concedeu ser um menino pela sexta parte de sua vida, e somando sua duodécima parte a isso cobriu-lhe as faces de penugem. Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após seu

casamento concedeu-lhe um filho. Ai! Infeliz, criança; depois de viver à metade da vida de seu pai, o Destino frio o levou. Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números, ele terminou sua vida (Boyer, 1996, p.121).

A equação matemática que representa o epitáfio de Diofanto será:

Seja x o número de anos vividos por Diofanto. Assim,

- **Juventude** (Deus lhe concedeu ser um menino pela sexta parte de sua vida): $\frac{x}{6}$;
- **Adolescência** (e somando sua duodécima parte a isso cobriu-lhe as faces de penugem): $\frac{x}{12}$;
- **Casamento estéril** (Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte): $\frac{x}{7}$;
- **Até o nascimento do filho** (e cinco anos após seu casamento concedeu-lhe um filho): 5;
- **Até a morte do filho** (Ai! Infeliz, criança; depois de viver à metade da vida de seu pai, o Destino o levou): $\frac{x}{2}$;
- **Até a morte de Diofanto** (Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números, ele terminou sua vida): 4.

A soma de tudo fornece a idade de Diofanto à época de sua morte. Então:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = 84$$

Dessa forma, presume-se que Diofanto viveu oitenta e quatro anos.

Diofanto escreveu três trabalhos: *Arithmetica*, que tinha originalmente, 13 livros, mas

somente seis deles chegaram até nós; *Sobre Números Poligonais* do qual restou apenas um fragmento; e *Porismas*, que se perdeu.

De acordo com Eves [2007], a obra *Arithmetica* é uma abordagem analítica da teoria algébrica dos números que eleva o autor à condição de gênio em seu campo e ainda, a parte do trabalho dedicada à resolução de problemas, apresenta 130 problemas variados que levam a equações do primeiro e segundo grau.

Em sua obra *Arithmetica*, Diofanto sempre esteve satisfeito com um número racional positivo para a solução de seus problemas descartando a necessidade de estudar soluções envolvendo números inteiros; ele não lidava com soluções negativas, considerando apenas uma solução para uma equação quadrática por exemplo.

De acordo com Eves [1997], alguns séculos após os trabalhos de Diofanto, não se registou um avanço qualitativo no ponto de vista teórico da aritmética. Houve, nesse intervalo de tempo, a criação do sistema de numeração decimal posicional e a introdução do zero pelos hindus, a sua adoção pelos árabes e a sua utilização ainda que tardia na Europa. Também nesse longo período, foram aperfeiçoados os algoritmos para se efetuar as operações, as frações e a Aritmética Financeira.

Devido aos métodos algébricos utilizados por Diofanto, de acordo com Domingues, podemos definir as equações diofantinas como sendo:

Todas as equações polinomiais [com qualquer número de incógnitas] com coeficientes inteiros, buscando sempre que se tratam

procurar, suas possíveis soluções também entre os inteiros. Isso embora Diofanto só tenha estudado algumas dessas equações, em casos particulares e também embora o universo que tenha usado para resolução dos seus problemas fosse o conjunto dos números racionais positivos. [1991, p.119]

Segundo Eves [1997], a atenção para a teoria dos números foi despertada no século XVII pelos trabalhos do matemático francês Pierre de Fermat [1601 -1665]. Muitas das contribuições de Fermat para a teoria dos números se deram na forma de enunciados e notas escrito nas margens de um exemplar do livro *Arithmetica* escrito por Diofanto, os quais foram estudados por outros matemáticos. A sua obra de maior relevância, ficou conhecida como o *Último Teorema de Fermat* onde, Pierre de Fermat afirmou sem dar uma demonstração que a equação $x^n + y^n = z^n$ para $n > 2$, não admitia soluções em inteiros positivos, sendo demonstrado somente em 1994, pelo matemático Andrew Wiles⁴ e, a partir de então, o teorema passou a ser chamado de *Teorema de Fermat-Wiles*.

Equações diofantinas lineares com duas variáveis

As equações diofantinas lineares são todas as equações polinomiais [com qualquer número de incógnitas], com coeficientes inteiros, sempre que se trata de procurar suas possíveis soluções também entre os inteiros. Nesta seção, estudaremos as equações diofantinas lineares, com duas incógnitas. Vamos também aprender a reconhecer

4 O matemático britânico Andrew Wiles nasceu na cidade de Cambridge em 11 de abril de 1953 e atualmente é professor na Universidade de Princeton.

quando uma equação diofantina linear possui ou não solução e como fazer para encontrar todas elas.

Uma equação diofantina linear (em duas variáveis) é uma equação da forma $ax + by = c$, onde $a, b, c \in \mathbb{Z}$ e $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. “Diofantina”, se refere à qualquer equação cujos coeficientes a e b são números inteiros, enquanto que “linear” é uma referência ao fato de que a equação acima representa uma reta no plano cartesiano, ou seja, resolver uma equação diofantina do tipo $ax + by = c$, nas variáveis x e $y \in \mathbb{Z}$, pode ser vista como sendo o problema de determinar pontos da reta que contém coordenadas inteiras.

Por exemplo, tomando a reta $6x + 21y = 2$ embora haja uma infinidade de pontos cujas coordenadas são números reais que satisfazem à reta, não há nenhum ponto cujas coordenadas são números inteiros, que satisfaça essa equação, pois como $x, y \in \mathbb{Z}$, temos que o membro esquerdo da igualdade $6x + 21y = 2$ é múltiplo de 3, enquanto que o direito não.

Exemplo. No evento do curso de matemática de Sinop, há 120 participantes inscritos. A comissão organizadora do evento, deseja separar os participantes em grupos de 6 e 12 pessoas para que seja possível fazer GTs com temas distintos acerca da palestra apresentada. Quantos grupos de 6 pessoas e 12 pessoas será possível montar de modo que todas permaneçam no auditório.

Solução. Representando o problema matematicamente, obtemos a equação diofantina em duas variáveis $6x + 12y = 120$. Esta equação pode ser representada por uma

reta no plano cartesiano representada por

$$y = \frac{120-6x}{12} \Rightarrow y = \frac{20-x}{2}.$$

Observe que para este problema é fácil determinar todas as possíveis soluções inteiras pois x deve ser um múltiplo de 2 na equação $y = \frac{20-x}{2}$ e, além disso, como $0 \leq x \leq 20$ [pois queremos soluções inteiras e positivas]. Dessa forma, teremos 11 soluções para o problema sendo: $(0, 10)$; $(2, 9)$; $(4, 8)$; $(6, 7)$; $(8, 6)$; $(10, 5)$; $(12, 4)$; $(14, 3)$; $(16, 2)$; $(18, 1)$; $(20, 0)$, conforme apresentado na figura 3 através da representação geométrica para o problema.

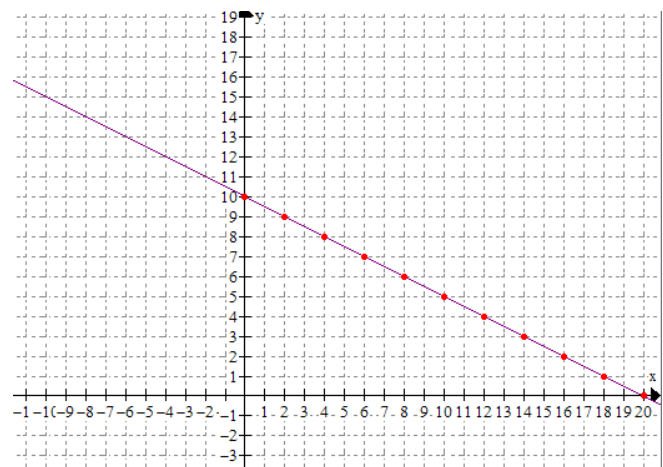


Figura 3. Visualização geométrica do conjunto solução da equação linear $6x + 12y = 120$.

Fonte: Plotado no software Winplot

Proposição 2: Se $\gcd(a, b) = 1$, então $\exists x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $ax + by = 1$.

Demonstração: Como $\gcd(a, b) = 1$, pelo Teorema de Bézout, existem inteiros n_0, m_0 tais que $n_0a + m_0b = 1$. Multiplicando os

dois lados desta igualdade por c , obtemos $n_0(ac) + m_0(bc) = c$. Como $d|ac$ e, por hipótese $d|bc$, então $d|n_0(ac)$ e $d|m_0(bc)$. Logo, $d|n_0(ac) + m_0(bc)$, resultando em $d|c$.

Teorema 5. Sejam a e b inteiros e $d = \text{mdc}(a, b)$. Se $d \nmid c$ então a equação $ax + by = c$ não possui nenhuma solução inteira. Se $d|c$ então possui infinitas soluções e se $x = x_0$ e $y = y_0$ é uma solução particular, então todas as soluções podem ser dadas por:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}t \\ y = y_0 - \frac{a}{d}t \end{cases}; t \in \mathbb{Z}$$

Demonstração: Se $d \nmid c$, então a equação $ax + by = c$ não possui solução inteira, pois, como $d = \text{mdc}(a, b)$ então:

Se $d|a$ e $d|b \Rightarrow d|ax$ e $d|by \Rightarrow d|ax + by \Rightarrow d|c$ contrariando a hipótese de que $d \nmid c$.

Se $d|c$, a equação $ax + by = c$ possui infinitas soluções, pois, tomando $d = \text{mdc}(a, b)$, sabemos que $d|c$, assim $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $c = kd$. Pelo teorema de Bézout $d = n_0a + m_0b$; $n_0, m_0 \in \mathbb{Z}$. Multiplicando ambos os termos dessa equação por k resulta em: $kd = kn_0a + km_0b$.

Como $c = kd$, então teremos $c = (kn_0)a + (km_0)b$ e, dessa forma $x = kn_0$ e $y = km_0$, onde $k = \frac{c}{d}$, pois $c = kd$. Logo,

$$\begin{cases} x = x_0 = \frac{c}{d}n_0 \\ y = y_0 = \frac{c}{d}m_0 \end{cases}$$

ou seja, (x_0, y_0) é uma solução particular para a equação diofantina dada.

Agora, vamos mostrar que todas as soluções da equação diofantina $ax + by = c$ é dada pela

$$\text{fórmula } \begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}t \\ y = y_0 - \frac{a}{d}t \end{cases}; t \in \mathbb{Z}$$

Sejam $\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ ax_0 + by_0 = c & (2) \end{cases}$ duas equações

diofantinas com $a, b \in \mathbb{Z}$

Subtraindo [2] de [1]:

$$\begin{aligned} ax + by - ax_0 - by_0 &= 0 \Rightarrow \\ (x - x_0)a + (y - y_0)b &= 0 \Rightarrow \\ (x - x_0)a &= (y_0 - y)b \end{aligned}$$

$$\text{Como } d = (a, b) \Rightarrow \frac{d}{d} = \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) \Rightarrow 1 = \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)$$

Assim,

$$(x - x_0)a \cdot \frac{1}{d} = (y_0 - y)b \cdot \frac{1}{d}$$

$$(x - x_0) \cdot \frac{a}{d} = (y_0 - y) \cdot \frac{b}{d} \text{ resultando:}$$

$\frac{a}{d} \left| \frac{b}{d} (y_0 - y) \right.$ e, como $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$, pela proposição 1, segue que

$$\frac{a}{d} \left| y_0 - y \Rightarrow y_0 - y = \frac{a}{d}t; t \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = y_0 - \frac{a}{d}t; t \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\frac{b}{d} \left| \frac{a}{d} (x - x_0) \right. \text{ e } \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$$

, pela proposição 1, segue que

$$\frac{b}{d} \left| x - x_0 \Rightarrow x - x_0 = \frac{b}{d}t; t \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = x_0 + \frac{b}{d}t; t \in \mathbb{Z} \right.$$

Portanto,

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}t \\ y = y_0 - \frac{a}{d}t \end{cases}$$

é a equação geral que determina as infinitas soluções da equação diofantina $ax + by = c$.

Exemplo. Em um evento que ocorreu no “CESI Clube” no Município de Sinop – MT, foram vendidos 720 ingressos, sabendo que o valor do ingresso para homens custava R\$ 15,00 e para mulheres R\$ 8,00. Quantos homens e quantas mulheres participaram do evento?

Solução.

Sejam, $\begin{cases} x = (n^0 \text{ homens}) \\ y = (n^0 \text{ mulheres}) \end{cases}$, que participaram do evento, temos que:

a quantidade de homens presentes no evento pode ser expressa por $15x$, enquanto a quantidade de mulheres por $8y$. Deste modo o problema acima pode ser representado pela equação $15x + 8y = 720$.

Para resolver este problema, primeiro devemos verificar se ele possui solução. Como o $\text{mdc}(15,8) = 1$ e $1|720$, então a equação diofantina $15x + 8y = 720$ possui solução.

Agora, determinaremos uma solução particular para nossa equação. Para tanto, faremos uso do método das divisões sucessivas.

$$\begin{aligned} 15 &= 1 \cdot 8 + 7 \\ 8 &= 1 \cdot 7 + 1 \\ 7 &= 7 \cdot 1 = 7 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

Como $\text{mdc}(15,8) = 1$, toma-se a igualdade onde o resto é 1 e faz-se:

$$1 = 8 - 1 \cdot 7$$

Como $7 = 15 - 1 \cdot 8$ que é obtido isolando-se o resto da primeira das igualdades anteriores, então:

$$\begin{aligned} 1 &= 8 - 1 \cdot (15 - 1 \cdot 8) = 8 - 1 \cdot 15 + 1 \cdot 8 = 15(-1) + 2 \cdot 8 \end{aligned}$$

Assim, um par de inteiros n_0, m_0 nas condições do Teorema de Bézout é dado por $n_0 = -1$ e $m_0 = 2$, sendo estes valores uma solução de $15x + 8y = 720$

Assim, uma solução particular para a equação diofantina é dada por:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{c}{d} n_0 \Rightarrow x = \frac{720}{1} (-1) = -720 \\ y_0 = \frac{c}{d} m_0 \Rightarrow y = \frac{720}{1} (2) = 1440 \end{cases}$$

Logo obtemos $(-720, 1440)$ como sendo a solução particular para a equação dada.

Observe que a solução particular $(-720, 1440)$ não serve como solução para nosso problema, tendo em vista que os valores para o x e y precisam ser todos positivos. Portanto precisamos encontrar a solução geral para a equação e limitar um intervalo de valores, que seja válido como solução para o problema.

Para encontrarmos todas as soluções da equação diofantina linear em duas incógnitas, basta substituir os valores obtidos na fórmula abaixo:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d} t \Rightarrow x = -720 + \frac{8}{1} t \\ y = y_0 - \frac{a}{d} t \Rightarrow y = 1440 - \frac{15}{1} t \end{cases}, \text{ onde } t \text{ é um inteiro.}$$

Portanto as soluções são: $x = -720 + 8t$ e $y = 1440 - 15t$, com $t \in \mathbb{Z}$.

Assim, os pontos inteiros e positivos da reta da equação $15x + 8y = 720$ são os pontos da forma $(x, y) = (-720, 1440) + (8, -15)t$ para $t \in \mathbb{Z}$, com t variando de $90 \leq t \leq 96$

que estão igualmente espaçados na reta, sendo obtidos a partir da translação do ponto inteiro $(-720, 1440)$ por múltiplos inteiros do vetor $(8, -15)$ no intervalo de t : $90 \leq t \leq 96$.

Portanto as soluções desejadas para o problema são:

t	$x = -720 + 8t$	$y = 1440 - 15t$
90	0	90
91	8	75
92	16	60
93	24	45
94	32	30
95	40	15
96	48	0

Figura 4. Visualização das possíveis soluções para o problema onde $0 \leq y \leq \frac{100}{3}, y \in \mathbb{Z}$.

Fonte: Valores obtidos através do software Excel

Como vimos anteriormente, determinar uma solução inteira para uma equação diofantina linear $ax + by = c$; $a, b, c \in \mathbb{Z}$, pode ser visto como determinar pontos (cujas coordenadas são números inteiros) na reta representada pela equação $15x + 8y = 720 \Rightarrow y = \frac{720 - 15x}{8}$ no plano cartesiano.

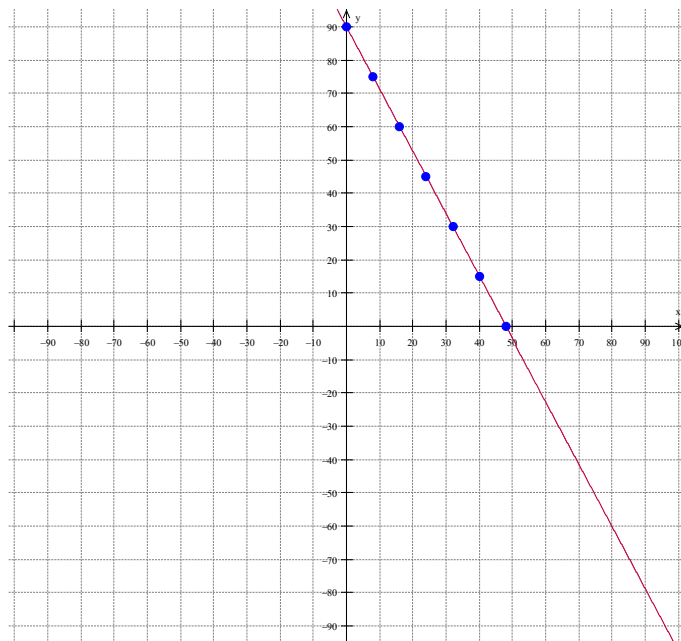


Figura 5. Visualização geométrica do conjunto solução da equação linear: $15x + 8y = 120$

Fonte: Plotado no software Winplot

Observe que no caso deste problema, as soluções são todos os pontos da reta cujas coordenadas são inteiras e positivas, pertencentes ao primeiro quadrante do plano cartesiano.

■ REFERÊNCIAS

Boyer, C.B. (1996). *História da matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. 2 ed. São Paulo: Edgard Blücher.

Boyer, C. B. (2003). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza editorial.

Eves, H. (1997). *Introdução à História da Matemática*. Campinas, SP: Editora da Unicamp.

Eves, H. (2007). *Introdução à Historia da Matemática*, Campinas-SP: Unicamp,

Domingues, H. (1991). *Fundamentos da Aritmética*. São Paulo: Atual.

Santos, J. (2000). *Introdução à Teoria dos Números*. São Paulo: IMPA.